ECUACIONES DE MOVIMIENTO

(PRÁCTICA 3: MOVIMIENTO CIRCULAR)

Ing. Francisco Franco – Web: http://mgfranciscofranco.blogspot.com/

Fuente de información: Trabajo de grado de Mónica A. Camacho D. y Wilson H. Imbachi M.

Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

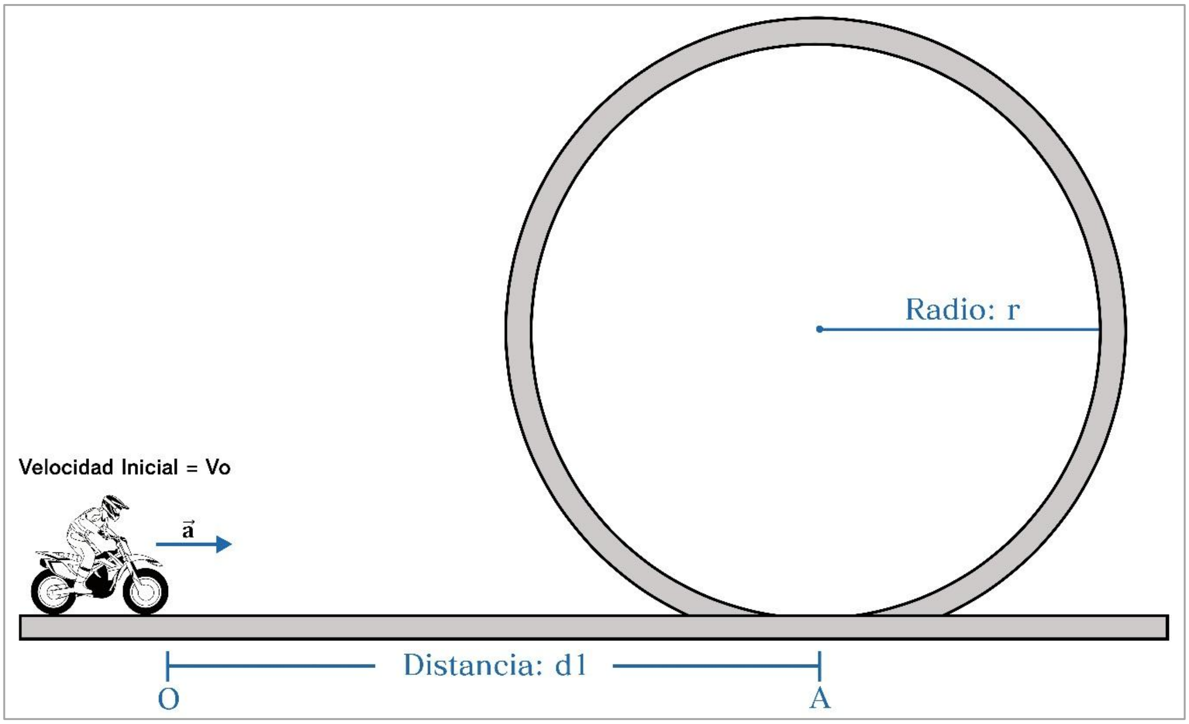

Figura 7. Práctica de movimiento circular – Sistema general.

El sistema general para la práctica de movimiento circular se muestra en la figura 7. Las ecuaciones que describen el movimiento del motociclista en los dos tramos que componen este sistema se muestran a continuación:

3.1. SEGMENTO RECTILINEO (TRAMO OA):

La figura 8 muestra el recorrido del motociclista a través del segmento recto de la pista. La velocidad con la que inicia su movimiento es v_0 y mantiene un valor de aceleración constante a_1 durante todo el recorrido por el tramo lineal, de modo que para un tiempo posterior $t = t_A$ alcanza una velocidad final equivalente a $v = v_A$.

Figura 8. Segmento rectilíneo.

Partiendo de estos datos iniciales, la aceleración del motociclista viene expresada como:

$$a = a_1 \quad \textbf{(40)}$$

Integrando la función de aceleración se obtiene la expresión general de velocidad para el tramo O-A:

$$v = \int a dt = \int (a_1) dt = a_1 t + c_1 \quad \textbf{(41)}$$

En el instante $t = t_0$ la velocidad del piloto es v_0, por lo tanto:

$$v(t = 0) = v_0 = a_1(0) + c_1 \rightarrow c_1 = v_0$$

$$v = a_1 t + v_0 \quad \textbf{(42)}$$

De modo similar se integra la expresión de velocidad obtenida para encontrar la función de posición del piloto en dirección x:

$$x = \int v dt = \int (a_1 t + v_0) dt = \frac{a_1 t^2}{2} + v_0 t + c_2$$

En el tiempo $t = t_0$ se tiene que $x = 0$, por lo tanto la ecuación de posición viene dada como:

$$\mathrm{x}(t=0)=0=\frac{a_1(0)^2}{2}+v_0(0)+c_2 \rightarrow c_2=0$$

$$x=\frac{a_1 t^2}{2}+v_0 t \quad \textbf{(43)}$$

3.1. SEGMENTO CIRCULAR (TRAMO A-A'):

Cuando el piloto ingresa al tramo circular su aceleración total cambia de un punto a otro debido a las variaciones de la velocidad en términos de magnitud y dirección. Para determinar el valor de aceleración total se deben conocer respectivamente las magnitudes de las aceleraciones centrípeta (a_c) y tangencial (a_t) en cada punto de la circunferencia. Con base en esto se definen una serie de puntos a lo largo del segmento circular con el fin de encontrar dichos valores de aceleración radial (centrípeta) y tangencial, como se muestra en la figura 9, y obtener así una expresión general de la aceleración del piloto dentro de este tramo. Los puntos escogidos para realizar el respectivo análisis son los siguientes: A (0 y 2π), B (punto entre 0 y $\pi/2$), C ($\pi/2$), D (punto entre $\pi/2$ y π), E (π), F (punto entre π y $3\pi/2$), G ($3\pi/2$), H (punto entre $3\pi/2$ y 2π).

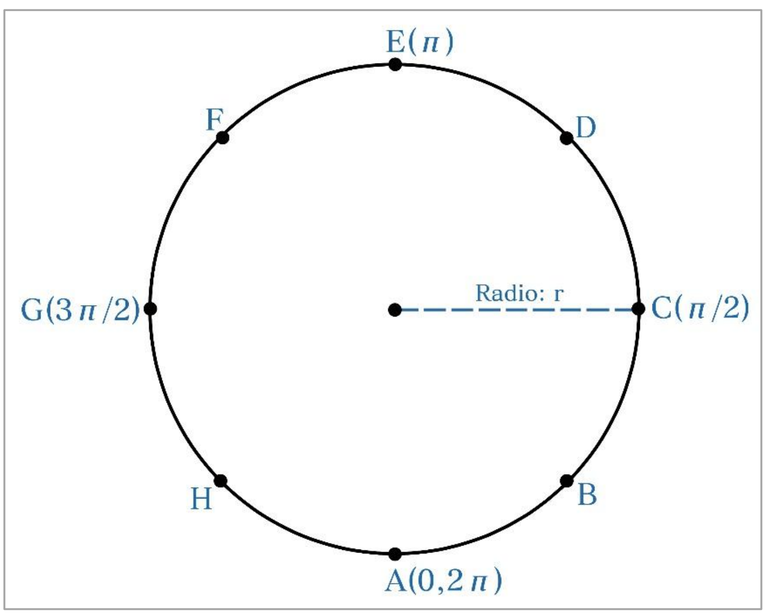

Figura 9. Puntos escogidos dentro del segmento circular.

3.1.1. Aceleración radial y tangencial (Puntos A, C, E y G):

En la figura 10 se muestran las fuerzas que actúan sobre el piloto en su paso por los puntos A (0 y 2π), C ($\pi/2$), E (π) y G ($3\pi/2$) del segmento circular.

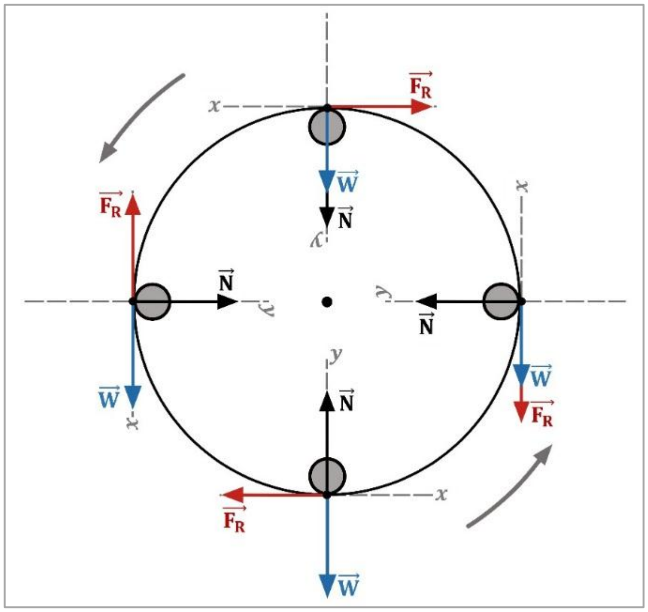

Figura 10. Fuerzas dentro del segmento circular – Parte 1.

Conociendo la dirección de cada fuerza en los puntos designados con base en un sistema de ejes coordenados xy se recurre a la segunda ley de Newton para calcular los valores de aceleración tangencial (a_t) y aceleración radial (a_r) como se muestra a continuación:

- **Punto A (0 y 2π):**

$$\sum F_x = -F_R = ma_t$$

$$-\mu N = ma_t$$

$$a_t = \frac{-\mu N}{m} \tag{44}$$

$$\sum F_y = N - mg = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} - g \tag{45}$$

- **Punto C ($\pi/2$):**

$$\sum F_x = -mg - F_R = ma_t$$

$$-mg - \mu N = ma_t$$

$$a_t = -g - \frac{\mu N}{m} \tag{46}$$

$$\sum F_y = N = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} \tag{47}$$

- **Punto E (π):**

$$\sum F_x = -F_R = ma_t$$

$$-\mu N = ma_t$$

$$a_t = \frac{-\mu N}{m} \tag{48}$$

$$\sum F_y = N + mg = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} + g \tag{49}$$

- **Punto G ($3\pi/2$):**

$$\sum F_x = mg - F_R = ma_t$$

$$mg - \mu N = ma_t$$

$$a_t = g - \frac{\mu N}{m} \tag{50}$$

$$\sum F_y = N = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} \tag{51}$$

3.1.2. Aceleración radial y tangencial (Puntos B, D, F y H):

En la figura 11 se observan las fuerzas que actúan sobre el piloto dentro del segmento circular en los puntos B (entre *0* y *π/2*), D (entre *π/2* y *π*), F (entre *π* y *3π/2*) y H (entre *3π/2* y *2π*).

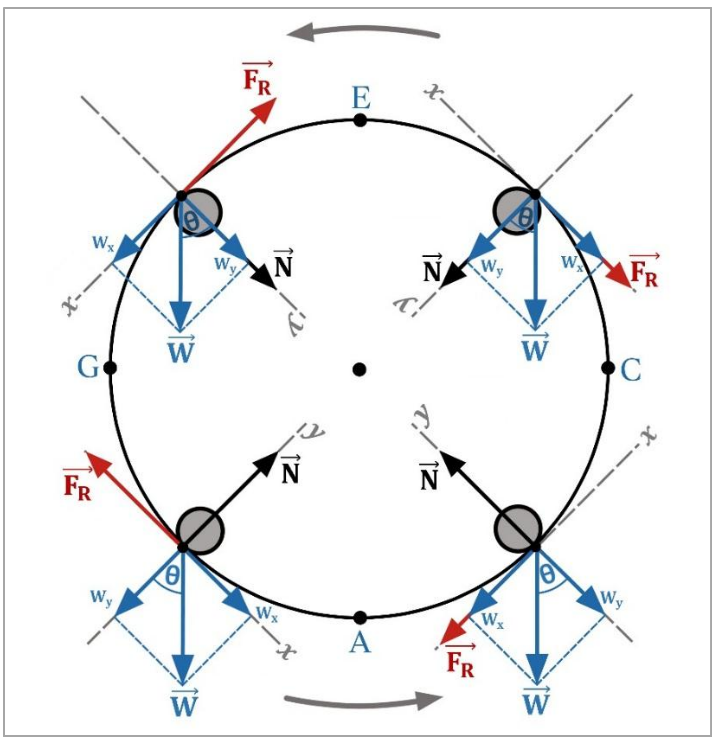

Figura 11. Fuerzas dentro del segmento circular – Parte 2.

De manera similar al caso anterior se determinan los valores de aceleración tangencial (a_t) y aceleración radial (a_r) en los puntos designados con base en la segunda ley de Newton:

- **Punto B (entre *0* y *π/2*):**

$$\sum F_x = -W_x - F_R = ma_t$$

$$-mg\sin\theta - F_R = -mg\sin\theta - \mu N = ma_t$$

$$a_t = -g\sin\theta - \frac{\mu N}{m} \tag{52}$$

$$\sum F_y = N - W_y = ma_r$$

$$N - mg\cos\theta = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} - g\cos\theta \tag{53}$$

- **Punto D (entre *π/2* y *π*):**

$$\sum F_x = -W_x - F_R = ma_t$$

$$-mg\sin\theta - F_R = -mg\sin\theta - \mu N = ma_t$$

$$a_t = -g\sin\theta - \frac{\mu N}{m} \tag{54}$$

$$\sum F_y = N + W_y = ma_r$$

$$N + mg\cos\theta = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} + g\cos\theta \tag{55}$$

- **Punto F (entre *π* y *3π/2*):**

$$\sum F_x = W_x - F_R = ma_t$$

$$mg\sin\theta - F_R = mg\sin\theta - \mu N = ma_t$$

$$a_t = g\sin\theta - \frac{\mu N}{m} \quad \textbf{(56)}$$

$$\sum F_y = N + W_y = ma_r$$

$$N + mg\cos\theta = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} + g\cos\theta \quad \textbf{(57)}$$

- **Punto H (entre 3π/2 y 2π):**

$$\sum F_x = W_x - F_R = ma_t$$

$$mg\sin\theta - F_R = mg\sin\theta - \mu N = ma_t$$

$$a_t = g\sin\theta - \frac{\mu N}{m} \quad \textbf{(58)}$$

$$\sum F_y = N - W_y = ma_r$$

$$N - mg\cos\theta = ma_r$$

$$a_r = \frac{N}{m} - g\cos\theta \quad \textbf{(59)}$$

De acuerdo a los valores de aceleración tangencial (a_t) y aceleración radial (a_r) encontrados en cada uno de los puntos de la circunferencia se deducen las expresiones generales para dichas aceleraciones. Estas funciones son las siguientes:

$$a_t = -g\sin\theta - \frac{\mu N}{m} \quad \textbf{(60)}$$

$$a_r = \frac{N}{m} - g\cos\theta \quad \textbf{(61)}$$

Sin embargo, considerando que el motociclista inicia su movimiento circular en $\theta = -\pi/2$, las ecuaciones generales de aceleración tangencial y radial quedan definidas de la siguiente manera:

$$a_t = -g\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mu N}{m} \quad \textbf{(62)}$$

$$a_r = \frac{N}{m} - g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad \textbf{(63)}$$

La ecuación general de aceleración total viene dada como:

$$a = \sqrt{a_t{}^2 + a_r{}^2} \quad \textbf{(64)}$$

Se relacionan las ecuaciones de velocidad y posición de una partícula dentro del movimiento unidimensional con las expresiones de aceleración definidas para el movimiento del motociclista a través del trayecto circular de la siguiente forma:

$$v = v_0 + at \rightarrow v = v_0 + a_t t \quad \textbf{(65)}$$

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} \rightarrow x = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2} \quad \textbf{(66)}$$

Se reescribe el término de aceleración tangencial (a_t) en función de la velocidad del piloto y del ángulo recorrido dentro de la circunferencia. Por lo tanto, de la ecuación (63) se despeja la fuerza normal (N) y se sustituye el término de aceleración radial (centrípeta) por v^2/r, de acuerdo con la teoría del movimiento circular:

$$a_r = \frac{N}{m} - g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$N = m\left[a_r + g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$N = m\left[\frac{v^2}{r} + g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{67}$$

Reemplazando el valor de la fuerza normal (N) en la ecuación (62) se llega a la nueva expresión de aceleración tangencial (a_t):

$$a_t = -g\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mu N}{m}$$

$$a_t = -g\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\mu}{m}\left[\frac{v^2}{r} + g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]m$$

$$a_t = -g\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \mu\left[\frac{v^2}{r} + g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{68}$$

Ahora bien, tomando x como la longitud del arco recorrido por el motociclista dentro del segmento circular se tiene que:

$$x = \theta_{rad} r = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2} \tag{69}$$

Se obtiene el valor del tiempo empleado por el piloto en recorrer la longitud de arco dada por la ecuación (69):

$$\frac{a_t}{2}(t)^2 + v_0(t) - \theta_{rad} r = 0$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 + 2a_t\theta_{rad} r}}{a_t} \tag{70}$$

Reemplazando este valor de tiempo en la ecuación (65) se tiene la expresión general de velocidad del piloto dentro del tramo circular en función del ángulo recorrido, del coeficiente de fricción de la superficie de contacto y de su velocidad inicial:

$$v = v_0 + a_t t = v_0 + a_t \left(\frac{-v_0 \pm \sqrt{{v_0}^2 + 2a_t \theta_{rad} r}}{a_t} \right)$$

$$v = v_0 - v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2a_t \theta_{rad} r} = \sqrt{{v_0}^2 + 2a_t \theta_{rad} r}$$

$$v^2 = {v_0}^2 + 2\theta_{rad} r \left\{ -g \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \mu \left[\frac{v^2}{r} + g \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$v^2 = {v_0}^2 - 2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - 2\theta_{rad} \mu v^2 - 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v^2 + 2\theta_{rad} \mu v^2 = {v_0}^2 - 2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v^2 \left(1 + 2\theta_{rad} \mu \right) = {v_0}^2 - 2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{{v_0}^2 - 2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)}{1 + 2\theta_{rad} \mu}} \tag{71}$$

Finalmente, se determina si la velocidad inicial con que el motociclista entra al segmento circular es suficiente para no caer en su intento de lograr un giro completo. Igualando a cero la función de velocidad y despejando el término de velocidad inicial (v_{01}) se conoce el valor mínimo de dicha velocidad inicial:

$$v = 0$$

$${v_{01}}^2 - 2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$v_{01}{}^{2} = 2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_{01} = \sqrt{2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

De esta manera la velocidad mínima con la que el piloto debe llegar a la rampa circular para dar un giro completo es:

$$v_{01} = v_A \geq \sqrt{2\theta_{rad} rg \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + 2\theta_{rad} \mu rg \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \textbf{(72)}$$

De la ecuación (72) se obtiene la expresión que determina el ángulo θ recorrido por el piloto dentro de la circunferencia en función de la velocidad inicial con que inicia su movimiento dentro del tramo circular.

$$\left[\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \mu \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right]\theta_{rad} \leq \frac{v_{01}{}^{2}}{2rg} \quad \textbf{(73)}$$